ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ
по дисциплине «Математика»

дата 27.11.2023

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь)

Тема:«Непрерывность функции. Метод интервалов»

Определение:Функция называется непрерывной в точке x_0, если f(x) стремится к $f(x_0)$ при стремлении x к x_0. При этом $f(x) - A = f(x) - f(x_0) = \Delta f$. Если функция f непрерывна в каждой точке некоторого промежутка A, то эта функция будет являться непрерывной на всем промежутке A. A сам промежуток A, называют в таком случае**промежутком непрерывности** функции f.

Пример:

Является ли функция f непрерывной в точках $x_1=0$ и $x_2=-1$, если:

а) $f(x)=x^4-x+1$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при } x\leqslant -1,\\ x^2-x & \text{при } x>-1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{при } x<0,\\ 5-2x & \text{при } x\geqslant 0;\end{cases}$ г) $f(x)=2x-x^2+x^3$?

Решение:

а) в точке x_1-непрерывна, в x_2-непрерывна

б) в точках x_1 непрерывна, в точке x_2 –не является непрерывной

в) в точке x_1-не является непрерывной, в x_2–непрерывна

г)непрерывна в x_1 и x_2

Свойство непрерывных функций: Если на некотором интервале (a;b) функция f непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она будет сохранять постоянный знак.

На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов.

Метод интервалов

Метод интервалов— это специальный алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида$f(x) > 0$и$f(x) < 0$.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов

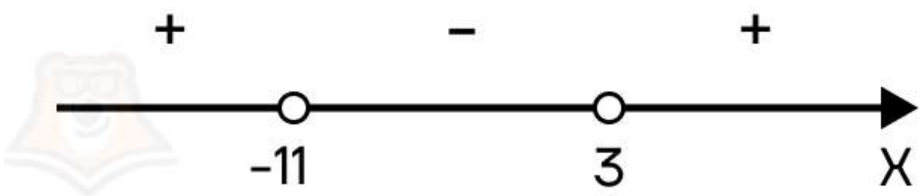
1 шаг. Перенести все части неравенства в одну сторону так, чтобы с другой остался только 0.
2 шаг. Найти нули функции, для этого необходимо решить уравнение $f(x) = 0$.
3 шаг. Начертить числовую прямую и отметить на ней все полученные корни. Таким образом, числовая прямая разобьется на интервалы.
4 шаг. Определить знаки на каждом интервале. Для этого необходимо подставить любое удобное значение в f(x) и определить, какой знак будет иметь функция на данном интервале.

Пример:решить неравенство $x^2 + 8x - 33 > 0$.

Шаг 1. Первым шагом необходимо найти нули функции, для этого приравниваем выражение слева к 0: $x^2 + 8x - 33 = 0$.
Шаг 2. Решаем квадратное уравнение и находим корни уравнения, получаем $x = 3$ и $x = -11$.
Шаг 3. Расставляем полученные корни на числовой прямой. Поскольку знак неравенства строгий, то точки должны быть выколотыми:

Шаг 4. Дальше необходимо определить знаки на каждом интервале.

Для этого подставим x = -12 в $x^2 + 8x — 33$. Получаем:
$(-12)^2 + 8\cdot(-12) — 33 = 144 — 96 — 33 = 15$.
Получается положительное число, следовательно, интервал от минус бесконечности до -11 положительный. Поскольку все корни в неравенстве повторяются нечетное количество раз (по одному разу), то знаки чередуются.



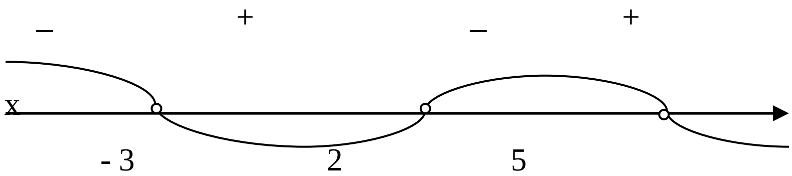
В ответ необходимо записать промежутки с положительным знаком, следовательно, ответом будет x ∈ (-∞; -11) U (3; +∞).

Пример: решить неравенство (x+3)(x-2)(x-5)>0

(x+3)(x-2)(x-5)=0,

x= - 3, x= 2, x = 5.

Эти точки разбивают всю числовую прямую на промежутки внутри каждого из которых функция сохраняет свой знак.



Берем любое число в правом крайнем интервале:

f(6)= (6+3)(6-2)(6-5) > 0,

f(x)>0 при x∈ (- 3;2)∪(5;+∞).

Ответ: (- 3;2)∪(5;+∞).

Пример: решить неравенство $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geq 0$.

Функция f(x) = $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ непрерывна в каждой точке своей области определения. Найдем область определения функции:

$x^2 - 5x + 6 \neq 0$

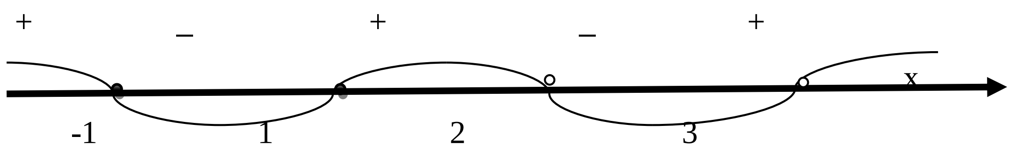
$x \neq 2; \quad x \neq 3$.

Найдем нули функции: $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1.$$

Точки -1;1;2;3 разбивают числовую прямую на 5 промежутков, в каждом из которых функция f(x) непрерывна, не обращается в нуль и сохраняет свой знак.



Берем любую точку в правом крайнем интервале.

f(4)= $\frac{4^2-1}{4^2-5\cdot4+6} = \frac{15}{2} > 0$, значит в этом интервале +, а в лево будет чередование.

$f(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [1;2) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1;2) \cup (3;+\infty)$.

Пример: Решить неравенство $\frac{x^2-5x}{2x+1} < 0$

$f(x) = \frac{x^2-5x}{2x+1}$

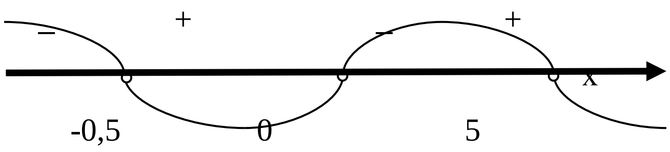
$2x + 1 \neq 0$

$x \neq -0,5$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x-5) = 0$

$x = 0$ или $x = 5$



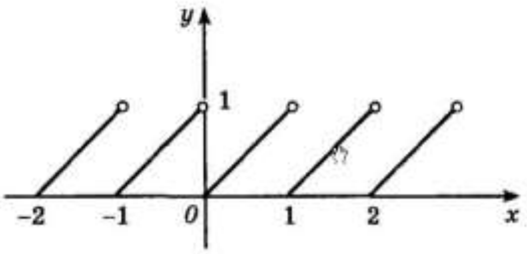
$f(6) = \frac{6^2-5\cdot6}{2\cdot6+1} > 0$,

$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -0,5) \cup (0;5)$.

Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup (0;5)$.

Пример функции, которая не является непрерывной

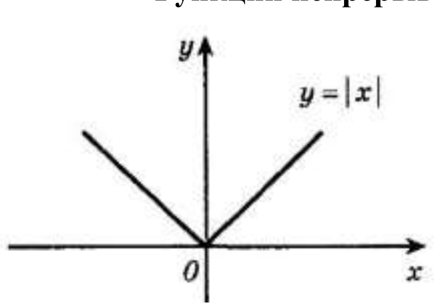
До сих пор мы сталкивались только с непрерывными функциями. Но существуют функции, которые не являются непрерывными в каждой точке, в которой они определены. Например,



функция $f(x) = \{x\}$, где $\{x\}$ – есть дробная часть числа x. Её график изображен на следующем рисунке.

Легко заметить, что основное свойство непрерывности функции в точке x_0 равное любому целому числу, не будет выполняться. Но в тоже время функция $f(x) = \{x\}$ непрерывна во всех других точках, на которых она определена, кроме точек, где x равно целому числу.На графике такие точки отмечены выколотыми кружками.

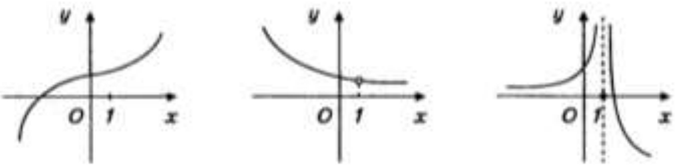
Функции непрерывные, но не дифференцируемые в данной точке



Есть функции, которые являются непрерывными в каждой точке своей области определения. Но при этом не будут иметь производные в некоторых точках. Например, функция $y=|x|$ непрерывна на все числовой оси, но при этом не дифференцируема в точке $x = 0$.

Домашнее задание:

Проверочная работа

	Непрерывность функции. Метод интервалов
1	Закончите фразу, чтобы получилось верное высказывание: Целые рациональные функции непрерывны в ____________ ____
2	Установите истинность или ложность следующих утверждений: а) Функция $f(x)=\frac{2x+3}{x}$ непрерывна на всем множестве R. ____ б) График функции $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывен на множестве R. ____
3	Укажите функции, непрерывные в точке $x = 1$, если их графики имеют следующий вид. Верный ответ подчеркните.  а) б) в)
4	Укажите промежутки непрерывности функции $g(x)=\frac{x+1}{2x+x^2}$.
5	Найдите область определения функции $y=\sqrt{\frac{x-4}{x}}$.

Конспект и задания отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru